Université Paris-Diderot | Année 2013-2014
MA2 - Algèbre et analyse élémentaires II | L1 MASS-2

Feuille de TD 3 - Opérations sur les espaces vectoriels

Questions du cours. Soit $(E, +, \cdot)$ un espace vectoriel (par exemple, $E = \mathbb{R}^n$).

(a) Est-ce que l'intérsection de deux sous-espaces vectoriels dans E est un sous-espace vectoriel de E ?

(b) Est-ce que la réunion de deux sous-espaces vectoriels dans E est un sous-espace vectoriel de E ?

(c) Donner la définition de somme de deux sous-espaces vectoriels de E.

(d) Sous quelles conditions deux sous-espaces vectoriels de E sont en somme directe ?

(e) Donner la définition de supplementaire d'un sous-espace vectoriel de E.

(f) Quelle rélation il y a entre l'espace vectoriel engendré par une partie $\mathcal{A}$ et le plus petit espace vectoriel contenant $\mathcal{A}$?

(g) Donner la définition de coordonnées d'un vecteur par rapport à une base de E.

(h) Énoncer la formule de Grassmann.

Exercice 1. Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs $u_1 = (1, 2, -1, -3)$, $u_2 = (2, -1, -1, 2)$ et $u_3 = (-3, 2, 2, -1)$. On note $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3)$ le sous-espace vectoriel engendré par (u_1, u_2, u_3).

(a) Justifier que $F \neq \mathbb{R}^4$ puis calculer une équation de F.

(b) Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est une base de F.

(c) Soit $v = (3, 5, -1, 1)$. Montrer que $v \in F$ puis déterminer les coordonnées de v dans la base (u_1, u_2, u_3).

Exercice 2. Soit E un espace vectoriel, et V, W deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $V \cup W$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $V \subseteq W$ ou $W \subseteq V$.

Exercice 3. Montrer que dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $v_1 = (4, -2, 1)$ et $v_2 = (0, 2, 1)$ engendrent le même sous-espace vectoriel que $w_1 = (3, 1, 2)$ et $w_2 = (1, -1, 0)$.

Exercice 4. Soient les sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$:

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, ; \; x + y + 2z = 0\} \quad \text{et} \quad G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, ; \; x + y = x + z = 0\}$$

(a) Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

Soient les vecteurs : $u_1 = (2, 0, -1)$, $u_2 = (0, 2, -1)$ et $u_3 = (-1, 1, 0)$.

(b) Montrer que $\{u_1, u_2\}$ engendre F. Vérifier que u_3 appartient à F ; déterminer des réels a et b tels que $u_3 = au_1 + bu_2$. Les vecteurs u_1, u_2, u_3 sont-ils linéairement indépendants ?

(c) Déterminer $F \cap G$.

(d) Pour $v = (x, y, z)$ dans $\mathbb{R}^3$, montrer qu'il existe un réel r tel que $v_r = (x + r, y - r, z - r)$ appartienne à F. Exprimer ce vecteur v_r comme combinaison linéaire de u_1 et u_2.

(e) Montrer que $F + G = \mathbb{R}^3$. Est-ce que F et G sont supplémentaires ?

(f) Montrer que le vecteur $w = (-1, 1, 1)$ forme une base de G. En déduire que la famille (u_1, u_2, w) forme une base de $\mathbb{R}^3$. Calculer les coordonnées de v_r et v par rapport à cette base.

Exercice 5. On considère les deux sous-espaces vectoriels E et F de $\mathbb{R}^3$ définies par :

$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x-y+z=0\}$ et $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x+y+z=0 \text{ et } x-y-z=0\}$.

(a) Donner une base pour chacun des sous-espaces vectoriels E, F, $E \cap F$ et $E+F$.

(b) Montrer que $E \oplus F = \mathbb{R}^3$.

Exercice 6. On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^4$:

$$u_1 = (1,2,3,4),\ u_2 = (2,2,2,6),\ u_3 = (0,2,4,4),\ v_1 = (1,0,-1,2),\ v_2 = (2,3,0,1).$$

On pose : $F = \mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3)$ et $G = \mathrm{Vect}(v_1,v_2)$. Donner une base, la dimension, et un système d'équations caractérisant les sous-espaces vectoriels F, G, $F \cap G$ et $F+G$.

Exercice 7. On considère les deux sous-espaces vectoriels E et F de $\mathbb{R}^4$ définies par :

$E = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4;\ -x+z=0 \text{ et } x-y+t=0\}$ et $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4;\ y+z-t=0\}$.

(a) Donner une base pour chacun des sous-espaces vectoriels E, F, $E \cap F$ et $E+F$.

(b) A-t-on $E+F = \mathbb{R}^4$?

Exercice 8. On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^4$:

$$u_1 = (1,-3,1,1),\quad u_2 = (1,-7,1,6),\quad u_3 = (3,-1,3,-7),$$
$$v_1 = (1,-2,2,-1),\quad v_2 = (-3,7,-6,2),\quad v_3 = (-5,8,-9,7).$$

Soit $F = \mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3)$ et $G = \mathrm{Vect}(v_1,v_2,v_3)$.

(a) Donner une base, la dimension, et un système d'équations pour F et G.

(b) Donner une base et la dimension pour les sous-espaces vectoriels $F \cap G$ et $F+G$.

Exercice 9. Soient $E_1 = \mathrm{Vect}(S_1)$ et $E_2 = \mathrm{Vect}(S_2)$, où

$$S_1 = \{(1,-4,-2,2),(-4,-2,5,4),(6,-6,-9,0)\} \subset \mathbb{R}^4,$$
$$S_2 = \{(-1,-2,1,2),(2,1,-3,1),(-1,1,1,3)\} \subset \mathbb{R}^4.$$

(a) Montrer que $E_1 \subset E_2$.

(b) $E_1 = E_2$? Si non, donner un vecteur de E_2 qui n'est pas dans E_1.

Exercice 10. Dans $\mathbb{R}^4$ on considère l'ensemble E des (x,y,z,t) tels que $x+y+z+t=0$ et l'ensemble F des (x,y,z,t) tels que $x=y=z=t$.

(a) Montrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

(b) Déterminer des bases de E et de F.

Exercice 11. Soit E_1 le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par $\{(1,3,0,4),(2,0,1,2)\}$ et E_2 le sous-espace vectoriel engendré par $\{(1,1,2,3),(4,-1,0,2)\}$. Les sous-espaces E_1 et E_2 sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?

Exercice 12. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les sous-espaces vectoriels $E_1 = \mathrm{Vect}(v_1,v_2)$ et $E_2 = \mathrm{Vect}(w_1,w_2)$ avec $v_1 = (2,1,1)$ et $v_2 = (2,2,1)$, $w_1 = (1,2,-1)$ et $w_2 = (2,1,2)$.

(a) Déterminer la dimension de $E_1 \cap E_2$.

(b) Déterminer la dimension de $E_1 + E_2$.

(c) A-t-on : $\mathbb{R}^3 = E_1 + E_2$? $\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_2$?

Exercice 13. Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les sous-espaces vectoriels $E_1 = \mathrm{Vect}(v_1,v_2)$ et $E_2 = \mathrm{Vect}(w_1,w_2)$, avec $v_1 = (1,-1,0,1)$, $v_2 = (0,2,1,0)$, $w_1 = (0,6,-1,4)$ et $w_2 = (3,3,1,5)$.

(a) Donner une base de $E_1 \cap E_2$.

(b) Donner une base de $E_1 + E_2$.

(c) Déterminer un supplémentaire de $E_1 + E_2$ dans $\mathbb{R}^4$.